УДК 512.2

Л. І. СУДИК, О. А. ПОПЛАВСЬКА
Хмельницький національний університет

СПЕЦИФІКАЦІЯ ФОРМУЛИ ВЕЙЛЯ

Знайдено у явному вигляді формулу для обчислення кратності характерів незвідного зображення алгебри sl_3.

There has been found the explicit view formula for calculating multiplicity of characters of irreducible image of algebra sl_3.

Ключові слова: алгебра, незвідне зображення.

Однією із важливих задач теорії зображень класичних алгебр Лі є знаходження кратностей ваг, які зустрічаються у їхніх незвідних зображеннях. Існує кілька обчислювальних формул для розв'язання цієї задачі. Найбільш відомими є формула Фрейденталя [1] та формула Костанта [2], які є наслідком відомої формули Вейля для характерів [3]. Проте використання даних формул є досить незручними, оскільки всі вони є рекурентними. В даній роботі для алгебри sl_3 запропонована явна формула знаходження кратності ваги незвідного зображення.

Нехай $E_{k,i}$ позначає 3×3 -матрицю, яка має одиницю в *k*-му рядку та *i*-му стовпчику і нуль в інших місцях. Нехай

$$\eta=\left\{s_1E_{1,1}+s_2E_{2,2}+s_3E_{3,3}\,\middle|\,s_1+s_2+s_3=0, s_i\in C\right\}$$

є картанівською підалгеброю sl_3. Визначимо $L_i\in\eta^*$ як $L_i(E_{j,j})=\delta_{i,j}$.

Нехай $\phi_1=L_1$, $\phi_2=L_1+L_2$ – фундаментальні ваги відносно η. Додатними коренями будуть такі ваги:

$$\begin{aligned}\alpha_1&=L_1-L_2=2\phi_1-\phi_2=(2,-1),\\ \alpha_2&=L_2-L_3=-\phi_1+2\phi_2=(-1,2),\\ \alpha_3&=L_1-L_3=\phi_1+\phi_2=(1,1).\end{aligned}$$

Позначимо $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$ вагу $\lambda_1\phi_1+\lambda_2\phi_2$, $a,b\in Z$. В цих позначеннях півсума всіх додатних коренів ρ дорівнює (1,1). Позначимо через $\Gamma_{a,b}$ незвідне зображення алгебри sl_3 зі старшою вагою $\lambda=(a,b)$ і позначимо через $\Lambda(a,b)$ множину всіх ваг $\Gamma_{a,b}$.

Лема 1. Для довільної ваги $\mu=(\mu_1,\mu_2)\in\Lambda(a,b)$ ми маємо:

$$|\mu_1|\le a+b,\ |\mu_2|\le a+b, \tag{1}$$

$$\mu_1+\mu_2\le a+b, \tag{2}$$

$$2\mu_1+\mu_2\le 2a+b, \tag{3}$$

$$\frac{2a+b}{3}+\frac{\mu_2-\mu_1}{3}+3>0. \tag{4}$$

Доведення випливає із простих геометричних властивостей вагової діаграми зображення $\Gamma_{a,b}$ [1].

Позначимо через $Char\,\Gamma_{a,b}$ характер $\Gamma_{a,b}$. Нагадаємо, що характером зображення $\Gamma_{a,b}$ називається породжуюча функція множини його ваг $\Lambda(a,b)$. Ми трактуємо характер як ряд Лорана від двох змінних *x*, *y*. Наступне твердження встановлює просту формулу для обчислення характеру незвідного зображення алгебри sl_3.

Лема 2. Має місце

$$Char\,\Gamma_{a,b}=s_{a,b}\left(x,\frac{y}{x},\frac{1}{y}\right),$$

де

$$s_{a,b}(x_1,x_2,x_3)=\frac{\begin{vmatrix} x_1^{a+b+2} & x_2^{a+b+2} & x_3^{a+b+2} \\ x_1^{b+1} & x_2^{b+1} & x_3^{b+1} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}$$

є відповідним многочленом Шура.

Доведення. Добре відомо [1, с. 400], що формула Вейля для характеру $Char\,\Gamma_{a,b}$ виражається через симетричні многочлени Шура $s_{a,b}(x_1,x_2,x_3)$ заміною $x_i=e(L_i),\ i=1,2,3.$ Тут e – мультиплікативний характер вагової решітки ваг алгебри sl_3. Виразимо ваги L_i через фундаментальні ваги:

$$\begin{aligned} L_1 &= \phi_1, \\ L_2 &= \phi_2-\phi_1, \\ L_3 &= -(L_1+L_2)=-\phi_2. \end{aligned}$$

Тому, поклавши $e(\phi_1)=x,\ e(\phi_2)=y$ і врахувавши мультиплікативність e, знайдемо

$$e(L_1)=x,\ e(L_2)=\frac{y}{x},\ e(L_3)=\frac{1}{y}.$$

Звідси одразу випливає твердження леми.

Для прикладу:

$$Char\,\Gamma_{1,0}=x+\frac{y}{x}+y^{-1},$$

$$Char\,\Gamma_{1,2}=xy^2+x^2+\frac{x^3}{y^2}+\frac{y^3}{x}+2y+2\frac{x}{y}+\frac{x^2}{y^3}+\frac{y^2}{x^2}+2x^{-1}+y^{-2}+\frac{y}{x^3}+\frac{1}{yx^2}.$$

Позначимо через $n_{a,b}(\mu_1,\mu_2)$ кратність ваги $\mu=(\mu_1,\mu_2)$. Зрозуміло, що

$$n_{a,b}(\mu_1,\mu_2)=\left[x^{\mu_1}y^{\mu_2}\right]Char\,\Gamma_{a,b}=\left[x^{a+b+\mu_1}y^{a+b+\mu_2}\right](xy)^{a+b}\,Char\,\Gamma_{a,b},$$

де $\left[x^n\right]f(x)$ позначає коефіцієнт біля x^n в многочлені $f(x)$. Домножимо характер на $(xy)^{a+b}$ для того, щоб уникнути негативних степенів. Має місце наступна Лема, яка отримується із Леми 2, якщо розкрити визначники.

Лема 3. Має місце

$$(xy)^{a+b}\,Char\,\Gamma_{a,b}=\frac{-y^{a+2b+3}x^{2a+b+3}+y^{a+1}x^{2a+2b+4}+y^{2a+2b+4}x^{b+1}-x^{a+2b+3}-y^{2a+b+3}+y^{b+1}x^{a+1}}{\left(x-y^2\right)\left(1-yx\right)\left(x^2-y\right)}.$$

Зауважимо, що всі степені є додатними цілими числами. Покладемо

$$N_{a,b}:=-y^{a+2b+3}x^{2a+b+3}+y^{a+1}x^{2a+2b+4}+y^{2a+2b+4}x^{b+1}-x^{a+2b+3}-y^{2a+b+3}+y^{b+1}x^{a+1},$$

$$\Delta=\frac{1}{\left(x-y^2\right)\left(1-yx\right)\left(x^2-y\right)}.$$

Прямою перевіркою отримуємо наступне твердження.

Лема 4. Має місце

$$\left[x^n\right]N_{a,b}=\delta_{n,a+1}y^{b+1}+\delta_{n,b+1}y^{2a+2b+4}-\delta_{n,0}y^{2a+b+3}-\delta_{n,2a+b+3}y^{a+2b+3}+\delta_{n,2a+2b+4}y^{a+1}-\delta_{n,a+2b+3}.$$

$$\left(x^n\right)\Delta=-\frac{1}{y^{3(n+1)}}\left(c(n,1)y^n+\ldots+c(n,i)y^{n+3(i-1)}+\ldots+c(n,n+1)y^{4n}\right)=-\sum_{i=1}^{n+1}c(n,i)y^{n-3(n+2-i)},$$

де

$$c(n,k)=\begin{cases}\min(n-k+2,k), n\ge 0, 1\le k\le n+1,\ n\in Z_+, k\in Z_+,\\ 0, \qquad \text{в іншому випадку,}\end{cases}$$

$\delta_{i,j}$ – функція Кронекера. Послідовність $c(n,k)$ в Енциклопедії цілих послідовностей [4] має номер A003983.

Сформулюємо основний результат роботи.

Теорема 1. Має місце

$$n_{a,b}(\mu_1,\mu_2)=c\left(a+b+\mu_1,\frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right)-c\left(b+\mu_1-1,\frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right)-c\left(a+\mu_1-1,\frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3}\right).$$

Доведення. Позначимо $n_a(\mu_1)=\left[x^{a+b+\mu_1}\right]\left((xy)^{a+b}\,Char\,\Gamma_{a,b}\right)$. Тоді

$$n_{a,b}(\mu_1)=\sum_{i=0}^{a+b+\mu_1}\left(\left[x^i\right]\Delta\right)\left(\left[x^{a+b+\mu_1-i}\right]N_{a,b}\right)=\left(\left[x^{b+\mu_1-1}\right]\Delta\right)y^{b+1}+\left(\left[x^{a+\mu_1-1}\right]\Delta\right)y^{2a+2b+4}-\left(\left[x^{a+d+\mu_1}\right]\Delta\right)y^{2a+b+3}-$$
$$-\left(\left[x^{\mu_1-a-3}\right]\Delta\right)y^{a+2b+3}+\left(\left[x^{\mu_1-a-b-4}\right]\Delta\right)y^{a+1}-\left(\left[x^{\mu_1-b-3}\right]\Delta\right).$$

Оскільки $|\mu_1|\le a+b$, то $\mu_1-a-b-4<0.$ Отже, $\left[x^{\mu_1-a-b-4}\right]\Delta=0$. Ми маємо

$$\left(\left[x^{b+\mu_1-1}\right]\Delta\right)y^{b+1}=-\sum_{i=1}^{b+\mu_1}c(b+\mu_1-1,i)\,y^{3(i-1)-b-2\mu_1}.$$

Звідси випливає

$$\left[y^{a+b+\mu_2}\right]\left(\left[x^{b+\mu_1-1}\right]\Delta\right)y^{b+1}=-\delta_{a+b+\mu_2,3(i-1)-b-2\mu_1}c(b+\mu_1-1,i)=-c\left(b+\mu_1-1,\frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right).$$

Аналогічно

$$\left[y^{a+b+\mu_2}\right]\left(\left[x^{a+\mu_1-1}\right]\Delta\right)y^{2a+2b+4}=-c\left(a+\mu_1-1,\frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3}\right),$$
$$\left[y^{a+b+\mu_2}\right]\left(-\left[x^{a+b+\mu_1}\right]\Delta\right)y^{2a+b+3}=c\left(a+b+\mu_1,\frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right),$$
$$\left[y^{a+b+\mu_2}\right]\left(-\left[x^{\mu_1-a-3}\right]\Delta\right)y^{a+2b+3}=c\left(\mu_1-a-3,\frac{2\mu_1+\mu_2-(2a+b)}{3}-1\right),$$
$$\left[y^{a+b+\mu_2}\right]\left(-\left[x^{\mu_1-b-3}\right]\Delta\right)=c\left(\mu_1-b-3,\frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3}\right).$$

Оскільки $n_{a,b}(\mu_1,\mu_2)=\left[y^{a+b+\mu_2}\right]n_a(\mu_1)$, то отримаємо

$$n_{a,b}(\mu_1,\mu_2)=c\left(a+b+\mu_1,\frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right)-c\left(b+\mu_1-1,\frac{a+2b+2\mu_1+\mu_2}{3}+1\right)-$$
$$-c\left(a+\mu_1-1,\frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3}\right)+c\left(\mu_1-a-3,\frac{2\mu_1+\mu_2-(2a+b)}{3}-1\right)+c\left(\mu_1-b-3,\frac{a-b+2\mu_1+\mu_2}{3}\right).$$

Для завершення доведення нам потрібне ще одне твердження:

Лема 5. Для $\mu\in\Lambda(a,b)$ виконується:

$$c\left(\mu_1 - a - 3, \frac{2\mu_1 + \mu_2 - (2a+b)}{3} - 1\right) = 0,$$

$$c\left(\mu_1 - b - 3, \frac{a - b + 2\mu_1 + \mu_2}{3}\right) = 0.$$

Доведення. Для першої тотожності з Леми 1 – формула (3) – ми маємо, що другий аргумент

$$\frac{2\mu_1 + \mu_2 - (2a+b)}{3} - 1 \le 0.$$

Але $c(n,k) = 0$, якщо $k < 0$. Для другої тотожності покажемо, що другий аргумент є більшим ніж перший. За Лемою 1 – формула (4) – ми маємо

$$\frac{a - b + 2\mu_1 + \mu_2}{3} - (\mu_1 - b - 3) = \frac{a + 2b + \mu_2 - \mu_1}{3} + 3 > 0 .$$

Але $c(n,k) = 0$, якщо $n < k$. Лему доведено. Отже, ми можемо нехтувати останніми двома виразами у формулі (1).

Теорему доведено.

Список використаних джерел

1. Fulton W. Representation theory: a first course / W. Fulton, J. Harris // Graduate texts in mathematics. – Springer, 1991. – N. 129.

2. Kostant B. A formula for the multiplicity of a weight / B. Kostant // Transactions of the American Mathematical Society. – 1959. – N 93. – P. 53 – 73.

3. Humphreys J. Introduction to Lie Algebra and Representation Theory / J. Humphreys. – New-York, Springer-Verlag Inc., 1978.

4. Sloane N. J. The On-Line Encyclopedia. Integer Sequences! [Electronic resource]. – URL : http://www.research.att.com